Демонстрационный вариант

переводной контрольной работы

по МАТЕМАТИКЕ

10 класс

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1-12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13-19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

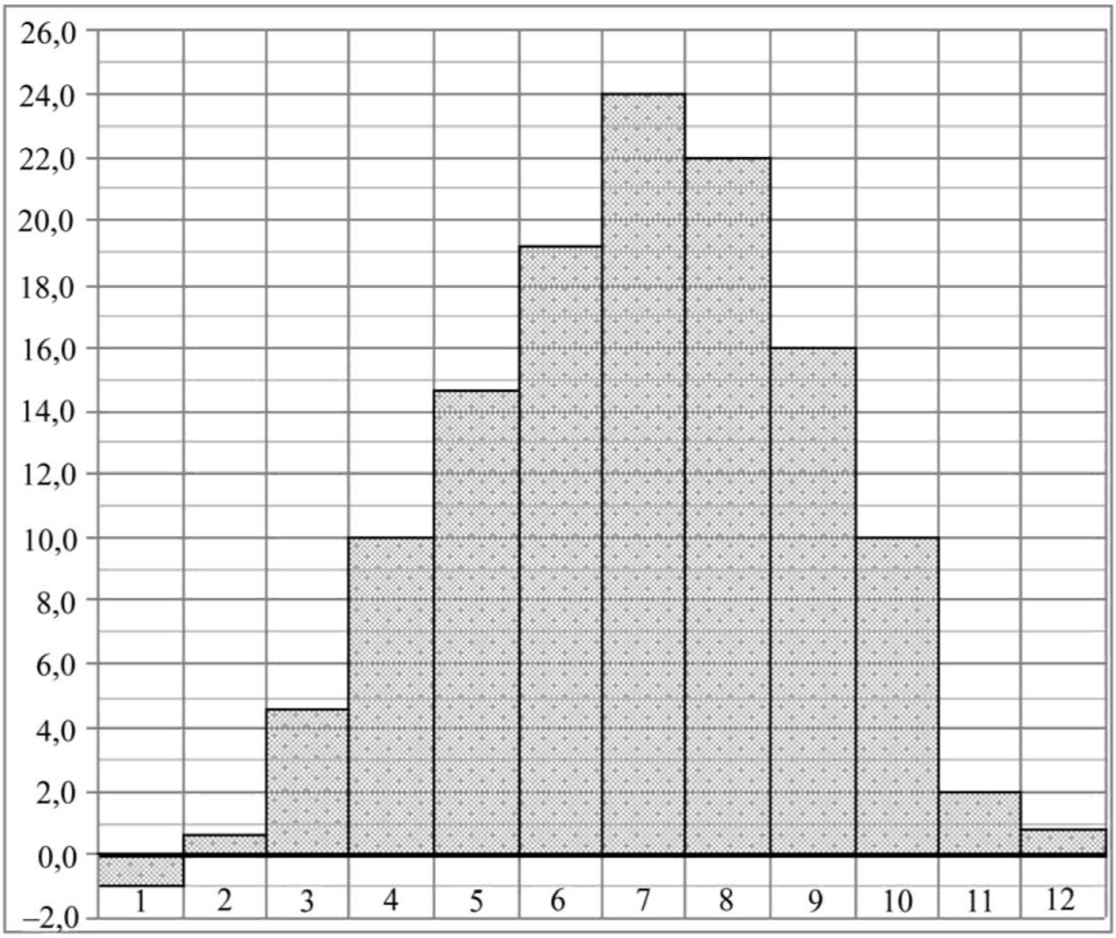
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1-12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Оптовая цена учебника 100 рублей. Розничная цена на 20 % выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 4000 рублей?

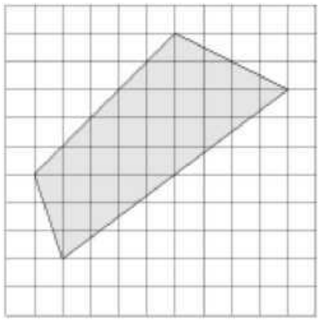
Ответ: ______________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 1988 году, когда среднемесячная температура превышала 12 градусов Цельсия.



Ответ: ______________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1х1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ____________________.

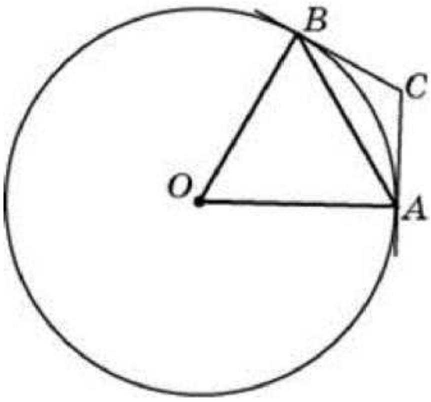
4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 19 пассажиров, равна 0,88. Вероятность того, что окажется меньше 9 пассажиров, равна 0,49. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 9 до 18.

Ответ: ____________________

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{5}{8-4x}}=\dfrac{1}{12}$.

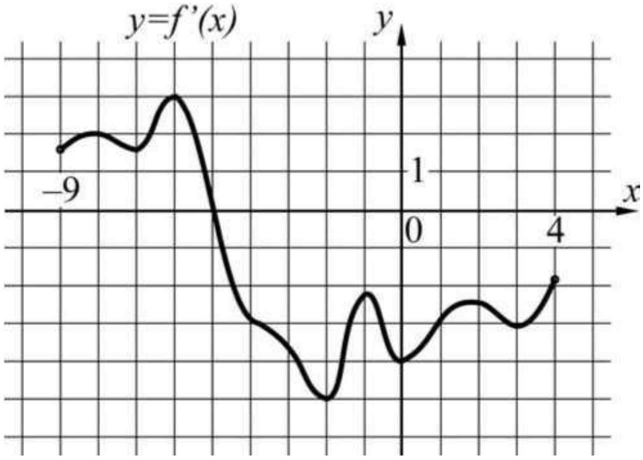
Ответ: ____________________

6 Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Меньшая дуга AB равна 62°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



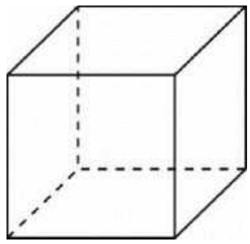
Ответ: ____________________.

7. На рисунке изображён график функции $У = f'(x)$ – произвольной функции $f(x)$, определённой на интервале (- 9; 4). Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку [-7;1}



Ответ: ________________________________.

8 Объём куба равен 343. Найдите площадь его поверхности.



Ответ: .

Часть 2

9

Найдите 9cos2a, если cos a = $\frac{5}{6}$

Ответ:

10

К источнику с ЭДС ε = 60 В и внутренним сопротивлением r = 2 Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U = \frac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 50 В? Ответ выразите в омах.

Ответ: ________________________________.

11

Два велосипедиста одновременно отправились в 130-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ________________________________.

12

Найдите точку минимума функции $y = (x + 12)e^{x-12}$.

Ответ: .

Для записи решений и ответов на задания 13-19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{3}{\cos\left(\dfrac{15\pi}{2}+x\right)}=-2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

14

Квадрат *ABCD* и цилиндр расположены таким образом, что *AB* — диаметр верхнего основания цилиндра, а *CD* лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60°.

б) Найдите длину той части отрезка *BD*, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна $\sqrt{6}$.

15

Решите неравенство $(3^{x+1} + 3^{2-x})\, x > 28x$.

16

Точка *I* — центр окружности Sj, вписанной в треугольник *ABC*, точка *O* — центр окружности S_2, описанной около треугольника *BIC*.

а) Докажите, что точка *O* лежит на окружности, описанной около треугольника *ABC* .

б) Найдите косинус угла *BAC*, если радиус описанной окружности треугольника *ABC* относится к радиусу окружности S_2 как 3:4.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,3 млн рублей?

18 Найдите все значения *x*, каждое из которых является решением $\dfrac{a\sqrt{3}\sin x+(\sqrt{3}-a)\cos x}{6\sin x-\sqrt{3}\cos x}=1$ при любом значении *a* из отрезка $[-1;\,3\sqrt{2}]$.

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 462. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Ответы

№ задания	**ответ**
1	33
2	5
3	30
4	0,39
5	-178
6	118
7	-5
8	294
9	3,5
10	10
11	13
12	-13

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{3}{\cos\left(\frac{15\pi}{2}+x\right)}=-2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Решение.

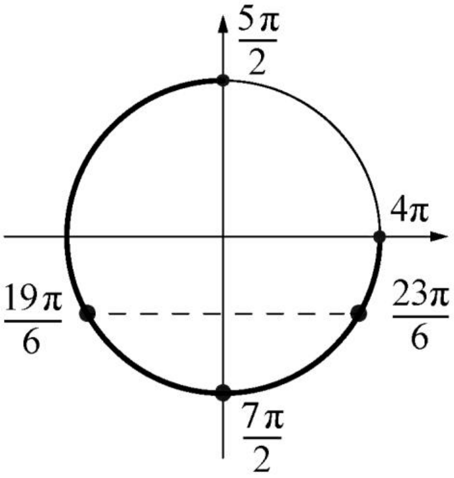
а) Поскольку $\cos\left(\frac{15\pi}{2}+x\right)=\sin x$, уравнение примет вид $\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{3}{\sin x}=-2$.

Пусть $\sin x=t$, тогда $\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}=-2$; $2t^2+3t+1=0$, откуда $t=-1$ или $t=-\frac{1}{2}$.

При $t=-1$ имеем $\sin x=-1$; $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. При $t=-\frac{1}{2}$ имеем $\sin x=-\frac{1}{2}$; $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Получим числа $\frac{19\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{23\pi}{6}$.



Ответ: а) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{19\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{23\pi}{6}$.

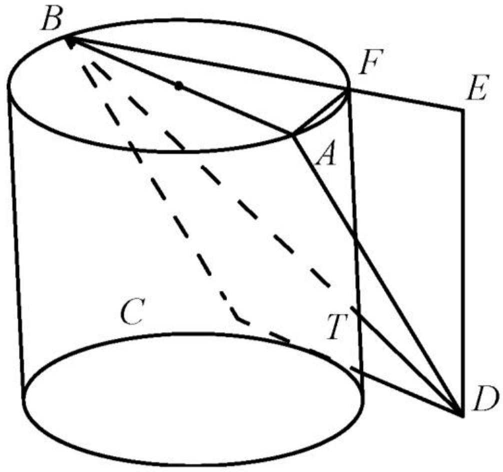
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Квадрат $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна $\sqrt{6}$.

Решение.



а) Пусть сторона CD квадрата касается окружности нижнего основания в точке K, O_1 — центр верхнего основания, а O — центр нижнего. Тогда O_1O — перпендикуляр к плоскости основания, отрезок OK перпендикулярен отрезку CD и по теореме о трёх перпендикулярах отрезок O_1K перпендикулярен CD. Поэтому K — середина CD. Тогда упомянутый угол наклона — угол OKO_1 и $\cos\angle OKO_1 = \frac{OK}{O_1K} = \frac{r}{O_1K}$, где r — радиус цилиндра. При этом $O_1K = AD = AB = 2r$, поэтому $\cos\angle OKO_1 = \frac{1}{2}$ и $\angle OKO_1 = 60°$.

б) Пусть отрезок BD пересекает поверхность цилиндра в точке T; E и F — проекции точек D и T соответственно на плоскость верхнего основания. Тогда FT лежит на образующей, и поэтому отрезок FT параллелен отрезку DE. Значит, $\frac{DT}{TB} = \frac{EF}{FB}$. Поскольку $\angle AFB = 90°$ как угол, опирающийся на диаметр, $\frac{EF}{FB} = \frac{EF}{FA} \cdot \frac{FA}{FB} = \mathrm{tg}\angle EAF \cdot \mathrm{tg}\angle ABF = \mathrm{tg}^2\angle ABF = \left(\frac{EA}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Поэтому и $\frac{DT}{TB} = \frac{1}{4}$, т. е. $BT = \frac{4}{5}BD = \frac{4}{5}AD\sqrt{2} = \frac{4}{5}DE \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2} = \frac{16}{5} = 3{,}2$.

Ответ: $3{,}2$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\left(3^{x+1}+3^{2-x}\right)x \geq 28x$.

Решение.

Преобразуем неравенство $\left(3^{x+1}+3^{2-x}\right)x \geq 28x$; $\dfrac{\left(3\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^{x}+9\right)x}{3^{x}} \geq 0$;

$\dfrac{(3^{x}-9)(3\cdot 3^{x}-1)x}{3^{x}} \geq 0$.

Отсюда находим множество решений данного неравенства: $\left[-1;\,0\right];\left[2;\,+\infty\right)$.

Ответ: $\left[-1;\,0\right];\left[2;\,+\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

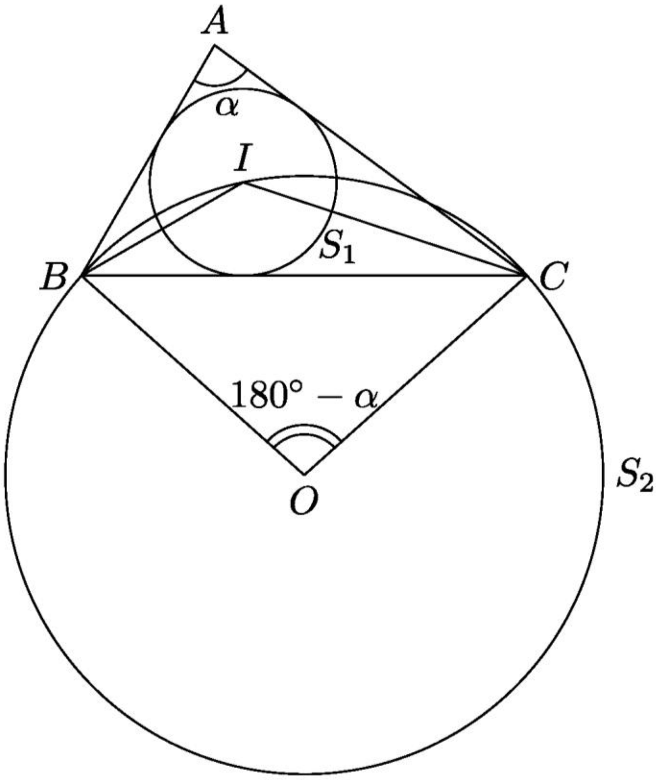
а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $3:4$.

Решение.

а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Поскольку I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, получаем, что $\angle BIC = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$. Дуга BC окружности S_2, не содержащая точки I, вдвое больше вписанного в эту окружность угла BIC, т. е. равна $180^\circ + \alpha$. Значит, дуга BIC окружности S_2 равна

$$360^\circ - \left(180^\circ + \alpha\right) = 180^\circ - \alpha .$$



Сумма углов при вершинах A и O четырёхугольника $ABOC$ равна 180°, значит, этот четырёхугольник вписанный. Следовательно, точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Пусть r и R — радиусы описанной окружности треугольника ABC и окружности S_2 соответственно. По теореме синусов

$$r = \frac{BC}{2\sin\alpha}, \qquad R = \frac{BC}{2\sin\left(90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \frac{BC}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Значит,

$$\frac{3}{4} = \frac{r}{R} = \frac{\dfrac{BC}{2\sin\alpha}}{\dfrac{BC}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

откуда $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2}{3}$. Следовательно, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 - 2\cdot\dfrac{4}{9} = \dfrac{1}{9}$.

Ответ: $\dfrac{1}{9}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,3 млн рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\ \frac{13S}{14};\ \ldots;\ \frac{2S}{14};\ \frac{S}{14};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}04S;\ 1{,}04\cdot\frac{13S}{14};\ \ldots;\ 1{,}04\cdot\frac{2S}{14};\ 1{,}04\cdot\frac{S}{14}.$$

Таким образом, выплаты должны быть следующими:

$$0{,}04S+\frac{S}{14};\ \frac{13\cdot 0{,}04S+S}{14};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}04S+S}{14};\ \frac{0{,}04S+S}{14}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0{,}04\left(1+\frac{13}{14}+\ldots+\frac{2}{14}+\frac{1}{14}\right)=S\left(1+\frac{15\cdot 0{,}04}{2}\right)=1{,}3S.$$

Значит, сумма, взятая в кредит, равна 1 млн рублей.

Ответ: 1 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\dfrac{a\sqrt{3}\sin x+(\sqrt{3}-a)\cos x}{6\sin x-\sqrt{3}\cos x}=1$ при любом значении a из отрезка $[-1;\,3\sqrt{2}]$.

<u>Решение.</u>

Искомые значения x должны быть среди решений данного уравнения при $a=0$, то есть среди решений уравнения

$\dfrac{\sqrt{3}\cos x}{6\sin x-\sqrt{3}\cos x}=1;\quad \sqrt{3}\cos x=6\sin x-\sqrt{3}\cos x;\quad \operatorname{tg}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3};\quad x=\dfrac{\pi}{6}+m\pi$, где $m\in\mathbb{Z}$.

Пусть некоторое $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ решение данного уравнения. Тогда равенство

$\dfrac{a\dfrac{\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-a)\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{6\cdot\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-1;\,3\sqrt{2}]$ выполняется**.**

Следовательно, все значения $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ условию задачи удовлетворяют.

Пусть некоторое $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ решение данного уравнения. Тогда равенство $\frac{-a\frac{\sqrt{3}}{2}-(\sqrt{3}-a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{-6\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-1;3\sqrt{2}]$ выполняется**.**

Следовательно, все значения $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 462. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Решение.

а) Пусть первоначально на доске 20 раз было записано число 19 и один раз число 82. Тогда сумма этих чисел равна 462. После перестановки цифр на доске 20 раз оказалось записано число 91 и один раз число 28. Сумма этих чисел равна $1848=4\cdot 462$.

б) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, $\ldots$, $\overline{a_nb_n}$. Обозначим $A=a_1+\ldots+a_n$, $B=b_1+\ldots+b_n$. По условию $10A+B=462$ и $10B+A=2\cdot 462$. Тогда разность этих чисел равна $9(B-A)=462$. Но левая часть последнего равенства делится на 9, а правая не делится. Значит, такая ситуация невозможна.

в) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, …, $\overline{a_nb_n}$. Обозначим $A = a_1 + \ldots + a_n$, $B = b_1 + \ldots + b_n$. По условию $10A + B = 462$, и нужно найти наибольшее значение числа $S = 10B + A$. Тогда

$$S = 10B + A = 10(462 - 10A) + A = 4620 - 99A.$$

Таким образом, необходимо найти наименьшее возможное значение числа A. Поскольку $b_1 \le 9a_1$, …, $b_n \le 9a_n$, получаем $B \le 9A$. Поэтому

$$462 = 10A + B \le 10A + 9A = 19A,$$

откуда $A \ge \frac{462}{19} > 24$, т. е. $A \ge 25$. Значит,

$$S = 4620 - 99A \le 4620 - 99 \cdot 25 = 2145.$$

Приведём пример, показывающий, что число S действительно может быть равным 2145. Пусть первоначально на доске 23 раза было записано число 19 и один раз число 25. Тогда сумма этих чисел равна 462. После перестановки цифр на доске 23 раза оказалось записано число 91 и один раз число 52. Сумма этих чисел равна 2145.

Ответ: а) Да, например, 20 раз число 19 и один раз число 82; б) нет; в) 2145.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4